LOGOMETRIA

Auctore

ROGERO COTES,

Trin. Coll. Cantab. Soc.

Astr. & Ph. Exp. Professore PLUMIANO, & R. S. S.

Eruditissimo Viro

EDMUNDO HALLEIO,

Societatis Regalis Secretario S. P.

Mitto tibi, hortatu Illustrissimi Præsidis NEWTONI, *quæ aliquot abhinc annis conscripseram de Rationibus dimetiendis. Tu vero, quum & Ipse dudum in eodem Argumento præclare versatus fueris, pro solito tuo candore, tentamen hoc qualecunque benigne accipies. Vale.*

AGITUR in hoc Tractatu de *Mensuris Rationum.* Hæ Mensuræ sunt quantitates cujuscunque generis, quarum magnitudines magnitudinibus rationum sunt analogæ. In dato itaque Systemate, rationis ejusdem eadem est mensura, duplicatæ dupla, triplicatæ tripla, subduplicatæ subdupla, sesquiplicatæ sesquialtera: denique quocunque modo per compositionem vel resolutionem auctæ vel diminutæ rationis, similiter

aucta est vel diminuta mensura. Æqualitatis ratio nullam habet magnitudinem, quia nullam addita vel detracta mutationem inducit; rationes quæ dicuntur majoris & minoris inæqualitatis contrarias habent magnitudinum suarum affectiones, quoniam in compositione & resolutione contraria semper efficiunt: itaque si mensura rationis quam habet terminus major ad minorem positiva censeatur, mensura rationis quam habet terminus minor ad majorem erit negativa, mensura vero rationis inter æquales terminos nullius erit magnitudinis. Porro diversa mensurarum oriuntur *Systemata*, prout modis diversis exponitur analogia illa determinata & immutabilis quæ est inter magnitudines rationum. Inde vero patet, exhiberi posse numero infinita Systemata, minuendo vel augendo Systematis cujusvis dati mensuras omnes in eadem data quacunque proportione, aut etiam pro mensuris adhibendo quantitates diversi generis. In tanta autem varietate confusionem aliquam oboriri necesse est, ni probe constiterit ad quodnam Systema referendæ sint mensuræ singulæ de quibus contingat sermonem institui. Huic malo remedium optime parari potest si mensura datæ alicujus rationis, quæ commodissima videbitur, pro *Modulo* habeatur ad quem constanter in omni Systemate mensuræ reliquarum rationum exigantur. Id enim si fiat, statim ex dato illo Modulo determinabitur Systema totum: nam ex mensuris constabit quæ Modulo erunt homogeneæ, quæque eo majores habebunt magnitudines vel minores quo major ille fuerit vel minor, ut ita mensurandarum rationum invariata magnitudinum servetur analogia inter ipsas mensuras. Patebit igitur in sequentibus rationem quandam dari, dupli inter & tripli rationes intermediam, ad rationem vero tripli aliquanto propius accedentem, quæ proposito nostro non immerito aptissima judicetur, siquidem ipsa rei natura hujus usum suadere ac non incertis indiciis efflagitare quodammodo videatur. Hanc ego, ex officio ejus desumpto nomine, *Modularem Rationem* appellabo; quo autem pacto ipsa sit accuratius definienda, ostendetur inferius, nunc enim de Logarithmis pauca sunt addenda.

Logarithmi sunt rationum mensuræ Numerales: solent autem in Canone sic disponi, ut singulis numeris naturali ordine crescentibus, & in serie continua positis adscribatur Logarithmus, non quidem ipsius numeri uti vulgo dicitur, sed rationis quam habet numerus ad Unitatem. Exinde vero rationis per quoscunque terminos designatæ facilis est inventio Logarithmi. Nam cum ratio antecedentis ad consequentem sit excessus rationis antecedentis ad Unitatem

supra

ſupra rationem conſequentis ad Unitatem: Logarithmus ejus ſimiliter erit exceſſus Logarithmi rationis quam habet antecedens ad Unitatem ſupra Logarithmum rationis quam conſequens habet ad Unitatem; hoc eſt, ut vulgari ſermone utamur, exceſſus Logarithmi antecedentis ſupra Logarithmum conſequentis; neutiquam enim diſplicet loquendi modus jam à multis annis receptus, ſi recte intelligatur. Exinde porro peregregium enaſcitur compendium ad operationes Arithmeticas. Datis enim duobus quibuſcunque numeris in ſe multiplicandis, ſi quæratur numerus ex multiplicatione productus; quoniam rationes numerorum datorum ad Unitatem, conficiunt ſimul additæ rationem producti ad Unitatem, & rationum componendarum menſuræ ſimul additæ conficiunt rationis compoſitæ menſuram: Logarithmus producti æquabitur Logarithmis numerorum datorum ſimul ſumptis. Ad eundem modum ſi quæratur numerus ex diviſione ortus; quoniam ratio diviſoris ad Unitatem è ratione dividendi ad Unitatem detracta relinquit rationem quoti ad Unitatem: habebitur quoti Logarithmus ſubducendo Logarithmum diviſoris è Logarithmo dividendi. Et eodem argumento, ſi quæratur dati cujuſvis numeri quælibet poteſtas; quoniam ratio dati numeri ad Unitatem per Indicem poteſtatis multiplicata rationem efficit quam habet numeri poteſtas ad Unitatem, & menſura prioris rationis multiplicata per eundem Indicem efficit pariter menſuram rationis poſterioris: Logarithmus poteſtatis æquabitur Logarithmo numeri dati per Indicem poteſtatis multiplicato. Et ſimiliter Logarithmus cujuſlibet radicis numeri dati æquabitur Logarithmo numeri dati per Indicem radicis diviſo. Igitur ope Canonis peragetur inventio poteſtatum & radicum per multiplicationem & diviſionem, multiplicatio autem & diviſio per additionem & ſubductionem. Ceterum de hiſce vulgo notis Logarithmorum uſibus non eſt mei inſtituti fuſius diſſerere: miſſis ergo ambagibus, ad alia nunc me confero & rem ipſam protinus aggredior.

PROPOSITIO I.

Invenire Menſuram Rationis cujuſcunque propoſitæ.

PRoponatur Ratio inter *AC* & *AB*, cujus Menſuram oportet invenire. Terminorum differentia *BC* diviſa concipiatur in particulas innumeras quam minimas *PQ*, atque ratio inter *AC* & *AB* in totidem rationes quam minimas inter *AQ* & *AP*: & ſi detur magnitudo rationis inter *AQ* & *AP*, dividendo dabitur ratio quam habet *PQ* ad *AP*; atque adeo data illa magnitudo rationis inter *AQ* & *AP*, per datam quantitatem $\frac{PQ}{AP}$ exponi poteſt. Manente *AP*, augeri vel minui intelligatur particula *PQ* in proportione quavis; & in eadem proportione augebitur vel minuetur magnitudo rationis inter *AQ* & *AP*: capiatur particula dupla vel



tripla, ſubdupla vel ſubtripla, & evadet ratio duplicata vel triplicata, ſubduplicata vel ſubtriplicata; etiamnum igitur exponetur per quantitatem $\frac{PQ}{AP}$. Sed &, aſſumpta determinata quavis quantitate M, exponi poteſt per $M \times \frac{PQ}{AP}$: erit ergo quantitas $M \times \frac{PQ}{AP}$ menſura rationis inter *AQ* & *AP*. Hæc vero menſura diverſam habebit magnitudinem, & ad Syſtema diverſum accommodabitur, pro diverſa magnitudine quantitatis aſſumptæ M, quæ adeo vocetur Syſtematis *Modulus*. Jam quemadmodum ſumma rationum omnium inter *AQ* & *AP* æqualis eſt propoſitæ rationi, quam utique habet *AC* ad *AB*: ita ſumma menſurarum omnium $M \times \frac{PQ}{AP}$ (per Methodos ſatis notas invenienda) æqualis erit ejuſdem propoſitæ rationis menſuræ quæſitæ. *Q. E. I.*

Corol. 1. Terminis *AP*, *AQ* ita ad æqualitatem accedentibus, ut quam minima ſit eorundem differentia *PQ*: erit $M \times \frac{PQ}{AP}$ vel $M \times \frac{PQ}{AQ}$ æqualis menſuræ rationis inter *AQ* & *AP* ad Modulum M.

Corol.

Corol. 2. Unde Modulus ille M est ad mensuram rationis inter terminos AQ & AP, ut terminorum alteruter AP vel AQ ad terminorum differentiam PQ.

Corol. 3. Data ratione inter AC & AB, datur summa omnium $\frac{PQ}{AP}$, & summa omnium $M \times \frac{PQ}{AP}$ est ut M. Itaque mensura datæ cujuscunque rationis est ut Modulus Systematis ex quo desumitur.

Corol. 4. Modulus ergo, in omni mensurarum Systemate, semper æqualis sit mensuræ rationis cujusdam determinatæ atque immutabilis: Quam proinde *Rationem Modularem* vocabo.

Scholium 1.

Problematis solutio per Exemplum illustrabitur. Sit z quantita determinata quævis & permanens, sit vero x quantitas indeterminata fluxuque perpetuo variabilis, ejusque fluxio sit $\dot{x}$; & quæratur mensura rationis inter $z + x$ & $z - x$. Statuatur hæc ratio æqualis rationi inter y & 1, exponatur autem numerus y per AP, fluxio ejus $\dot{y}$ per PQ, 1 per AB: & ex Corollario primo colligetur fluxionem quæsitæ mensuræ rationis inter y & 1 esse $M \times \frac{\dot{y}}{y}$. Reponatur jam pro y valor ejus $\frac{z + x}{z - x}$, itemque pro $\dot{y}$ valoris fluxio $\frac{2z\dot{x}}{\overline{z - x}|^2}$: & fluxio mensuræ evadet $2M \times \frac{z\dot{x}}{zz - xx}$ vel $2M \times \frac{\dot{x}}{z - \frac{xx}{z}}$ sive $2M$ in $\frac{\dot{x}}{z} + \frac{\dot{x}x^2}{z^3} + \frac{\dot{x}x^4}{z^5} + \&c.$ Atque adeo mensura illa fiet $2M$ in $\frac{x}{z} + \frac{x^3}{3z^3} + \frac{x^5}{5z^5} + \&c.$ Unde patet Corollarium sequens.

Corol. 5. Si duarum quantitatum summa sit z & differentia sit x; & sumatur $2M\frac{x}{z} = A$, $A\frac{xx}{zz} = B$, $B\frac{xx}{zz} = C$, $C\frac{xx}{zz} = D$, &c: Mensura rationis quam habet quantitas major ad quantitatem minorem, erit $A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{7}D + \&c.$

Scholium 2.

Non absimili computo mensura rationis inter $1 + v$ & 1 erit M in $v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5 - \&c.$ Unde si mensura illa vocetur m, erit $\frac{m}{M} = v - \frac{1}{2}vv + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$, &c: ac proinde

unde $\frac{mm}{MM} = vv - v^3 + \frac{11}{12}v^4 - \frac{5}{6}v^5$, &c; similiterque $\frac{m^3}{M^3} = v^3 - \frac{3}{2}v^4 + \frac{7}{4}v^5$, &c; quinetiam $\frac{m^4}{M^4} = v^4 - 2v^5$, &c; ac denique $\frac{m^5}{M^5} = v^5$, &c. Ut igitur vicissim, ex data mensura m, inveniatur ratio quam metitur; addendo æqualia æqualibus habebitur $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} = v * - \frac{1}{6}v^3 + \frac{5}{24}v^4 - \frac{13}{60}v^5$, &c; atque iterum $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} = v * * - \frac{1}{24}v^4 + \frac{3}{40}v^5$, &c; rursumque $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} = v * * * - \frac{1}{120}v^5$, &c; atque tandem $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} + \frac{m^5}{120M^5} = v * * * *$, &c; id est, $\frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} + \frac{m^5}{120M^5} +$ &c. $= v$. Itaque ratio quæsita inter $1 + v$ & 1, est ea quam habet $1 + \frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} + \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} + \frac{m^5}{120M^5} +$ &c. ad 1. Ponatur $m = M$, sive $\frac{m}{M} = 1$; & exinde Ratio Modularis erit ea quam habet $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} +$ &c. ad 1.

Eodem modo, si detur ratio inter 1 & $1 - v$, mensura hujus rationis erit M in $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$, &c. Et vicissim si detur rationis mensura m, ratio erit ea quam habet 1 ad $1 - \frac{m}{M} + \frac{mm}{2MM} - \frac{m^3}{6M^3} + \frac{m^4}{24M^4} - \frac{m^5}{120M^5} +$ &c. Ponatur $m = M$, sive $\frac{m}{M} = 1$; & exinde Ratio Modularis erit ea quam habet 1 ad $1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} +$ &c. Ex hisce vero patet Corollarium sequens.

Corol. 6. Exposito termino R, si sumatur $\frac{1}{1}R = A$, $\frac{1}{2}A = B$, $\frac{1}{3}B = C$, $\frac{1}{4}C = D$, $\frac{1}{5}D = E$, &c. in infinitum; & capiatur $S = R + A + B + C + D + E +$ &c: Ratio Modularis erit ea quæ est inter terminum minorem expositum R & majorem inventum S. Vel exposito termino S, si sumatur $\frac{1}{1}S = A$, $\frac{1}{2}A = B$, $\frac{1}{3}B = C$, $\frac{1}{4}C = D$, $\frac{1}{5}D = E$, &c. in infinitum; & capiatur $R = S - A + B - C + D - E +$ &c: Ratio Modularis erit ea quæ est inter terminum majorem expositum S & minorem inventum R. Porro eadem ratio est inter 2,718281828459 &c. et 1, vel inter 1 & 0,367879441171 &c.

Scho-

Scholium 3.

Si forte termini minores desiderentur, qui eandem proxime Rationem Modularem ita exhibeant, ut nulli ipsis non majores propius: instituenda erit operatio ad modum sequentem. Dividatur terminus major 2,71828 &c. per minorem 1, vel etiam major 1 per minorem 0,367879 &c. & rursus minor per numerum qui reliquus est, & hic rursus per ultimum residuum, atque ita porro pergatur: &

Rationes Vera Majores.		*Rationes Vera Minores.*	
1	0 × 2	0	1
2	1	2	0
3	1 × 2	2	1 × 1
8	3	6	2
11	4 × 1	8	3 × 1
76	28	11	4
87	32 × 1	19	7 × 4
106	39	87	32
193	71 × 6	106	39 × 1
1264	465	1158	426
1457	536 × 1	1264	465 × 1
21768	8008	1457	536
23225	8544 × 1	2721	1001 × 8
25946	9545	23225	8544
49171	18089 × 10	25946	9545 × 1
&c.	&c.	&c.	&c.

prodibunt quotientes 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, 1, 16, 1, 1, &c. His inventis, perficiendæ sunt binæ rationum columnæ, quarum altera terminos continet rationem habentes vera majorem, altera terminos quorum ratio est vera minor; ineundo computationem à rationibus 1 ad 0, 0 ad 1, quæ remotissimæ sunt à vera; inde autem exorsam deducendo ad rationes reliquas,

quæ

quæ continue ad veram propius accedunt. Multiplicentur itaque termini 1 & 0 per quotientem primum 2, & scribantur facti 2 & 0 infra terminos 0 & 1; & addendo prodibit ratio 2 + 0 ad 0 + 1, sive 2 ad 1. Hujus termini multiplicentur per quotientem secundum 1, factique 2 & 1 addantur terminis 1 & 0; & habebitur ratio 2 + 1 ad 1 + 0, sive 3 ad 1. Hujus termini multiplicentur per quotientem tertium 2, factique 6 & 2 addantur terminis præcedentibus 2 & 1; & habebitur ratio 8 ad 3. Hujus termini multiplicentur per quotientem quartum 1, factique 8 & 3 addantur terminis præcedentibus 3 & 1; & habebitur ratio 11 ad 4. Hujus termini multiplicentur per quotientem quintum 1, factique 11 & 4 addantur præcedentibus 8 & 3; & habebitur ratio 19 ad 7. Hujus termini rursus multiplicentur per quotientem sextum 4, factique 76 & 28 addantur præcedentibus 11 & 4, ad inveniendam rationem 87 ad 32; & sic porro pergendum quousque libuerit, transitu alternis facto in alteram columnam. Hisce peractis, habebuntur rationes vera majores 3 ad 1, 11 ad 4, 87 ad 32, 193 ad 71, 1457 ad 536, 23225 ad 8544, 49171 ad 18089, &c. Vera autem minores erunt 2 ad 1, 8 ad 3, 19 ad 7, 106 ad 39, 1264 ad 465, 2721 ad 1001, 25946 ad 9545, &c. Atque hæ quidem sunt præcipuæ & primariæ rationes, quibus ad rationem propositam continue appropinquatur.

Quod si exquiratur integra series rationum omnium vera majorum quæ ita dari possint, ut nulla minoribus terminis designata ratio vera major ad veram propius accedat; & similiter series integra rationum omnium vera minorum quæ ita dari possint, ut nulla minoribus terminis designata ratio vera minor ad veram propius accedat: inter primarias illas modo inventas inserendæ sunt aliæ secundariæ rationes. Hæ vero locum habent ubi quotiens unitatem superat. Inveniuntur autem mutata multiplicatione, quæ supra per quotientem facta est, in continuam additionem terminorum tot vicibus quot sunt unitates in quotiente. Sic quia quotiens primus erat 2, termini 1 & 0 bis addendi sunt terminis 0 & 1; & summæ dabunt rationes 1 ad 1, 2 ad 1. Hi ultimi termini 2 & 1, quia quotiens secundus erat 1, semel addendi sunt terminis 1 & 0; & summæ dabunt rationem 3 ad 1. Hi termini 3 & 1, quia quotiens tertius erat 2, bis addendi sunt terminis 2 & 1; & summæ dabunt rationes 5 ad 2, 8 ad 3. Hi ultimi termini 8 & 3, quia quotiens quartus erat 1, semel addendi sunt terminis 3 & 1; & summæ dabunt rationem 11 ad 4. Hi termini 11 & 4, quia quotiens

tiens

tiens quintus erat 1, semel addendi sunt terminis 8 & 3; & summæ dabunt rationem 19 ad 7. Hi denique termini 19 & 7, quia quo-

Rationes Veræ Majores.		*Rationes Veræ Minores.*	
1	0×2	0	1
2	1	1	0
3	1×2	1	1
8	3	1	0
11	4×1	2	1×1
19	7	3	1
30	11	5	2
19	7	3	1
49	18	8	3×1
19	7	11	4
68	25	19	7×4
19	7	87	32
87	32×1	106	39×1
&c.	&c.	&c.	&c.

tiens sextus erat 4, quater addendi sunt terminis 11 & 4; & summæ dabunt rationes 30 ad 11, 49 ad 18, 68 ad 25, 87 ad 32. Et sic porro procedere licebit quousque commodum videbitur. Ista tandem operatione peracta, series integra rationum omnium vera majorum, erit 1 ad 0, 3 ad 1, 11 ad 4, 30 ad 11, 49 ad 18, 68 ad 25, 87 ad 32, &c. similiterque series integra rationum omnium vera minorum, erit 0 ad 1, 1 ad 1, 2 ad 1, 5 ad 2, 8 ad 3, 19 ad 7; &c.

Harum approximationum utilitas ad alia multa sese diffundit: quapropter earum inventionem aliquanto prolixius expositam dedi, per Methodum quæ mihi simplicissima & facillima videtur. Idem argumentum paulo aliter pertractarunt Viri celeberrimi *Wallisius* & *Hugenius*.

PROPOSITIO II.

Logarithmorum Canonem Briggianum *conſtruere.*

NUmerorum Compoſitorum Logarithmi derivantur ex Logarithmis Primorum componentium, per additionem ſolam; horum autem inveſtigatio pluribus modis inſtitui poteſt: Exemplum unicum appono.

Per Corollarium quintum Propoſitionis ſuperioris, ſcribendo 1 pro M, inveniantur Logarithmi rationum inter 126 & 125, 225 & 224, 2401 & 2400, 4375 & 4374; qui vocentur reſpective p, q, r, s: & Logarithmus denarii ſeu rationis decupli erit $239p + 90q - 63r + 103s$, ſive 2,302585092994 &c. Itaque cum Logarithmus *Briggianus* denarii ſit 1; fiat (per Corol. 3. Prop. 1.) ut denarii Logarithmus modo inventus 2,302585092994 &c, ad Modulum ſuum 1, ita denarii Logarithmus *Briggianus* 1, ad Modulum *Briggianum*, qui adeo erit 0,434294481903 &c. Ponatur ergo deinceps iſte valor pro M, & erunt $M \times \overline{202p + 76q - 53r + 87s}$, $M \times \overline{167p + 63q - 44r + 72s}$, $M \times \overline{114p + 43q - 30r + 49s}$ Logarithmi *Briggiani* numerorum 7, 5, 3. Logarithmus numeri 2 habetur, ſubducendo Logarithmum numeri 5 à Logarithmo numeri 10. Atque ita dantur & Modulus *Briggianus* & Logarithmi Primorum omnium qui ſunt minores denario.

Logarithmi numerorum ſequentium Primorum 11, 13, 17, 19, 23, &c. ita computari poſſunt. Quæratur tum factus à numeris Primo propoſito utrinque proxime adjacentibus, tum Primi ipſius quadratum, quod ſemper unitate factum illud ſuperabit. Logarithmo rationis quadrati ad factum (per Corol. 5. Prop. 1. inveniendo) addatur ipſius facti Logarithmus, qui ſemper componetur ex datis Logarithmis Primorum qui propoſito Primo ſunt minores: & ſemiſumma erit Logarithmus Primi quæſitus.

Corol. Canonis *Briggiani* Modulus eſt 0,434294481903 &c: Hujus vero Reciprocus eſt 2,302585092994 &c.

Scholium.

Ad hunc itaque modum perfici poſſet Logarithmorum Tabula ampliſſima, qualis edita eſt à *Briggio* vel *Vlacco*. Inventioni autem Numerorum & Logarithmorum ſibi invicem congruentium, qui intermedii

termedii ſunt & ultra Tabulæ limites excurrunt, abunde ſufficiet terminus primus Seriei quæ in Corollario quinto Propoſitionis præcedentis exhibetur.

Si dato Numero intermedio quæratur ejus Logarithmus; pone a & e pro Numero intermedio propoſito atque huic proximo tabulari, ita ut a deſignet majorem, e minorem; ſit eorum ſumma z, differentia x; pone λ pro Logarithmo rationis quam habet a ad e, hoc eſt, pro exceſſu Logarithmi Numeri a ſupra Logarithmum Numeri e: & erit $\lambda \doteq 2M\frac{x}{z}$ quamproxime.

Si quæratur Numerus qui congruit Logarithmo intermedio; quoniam eſt $\lambda = \frac{2Mx}{z} = \frac{2Mx}{2a - x}$ vel $\frac{2Mx}{2e + x}$; erit $x = \frac{\lambda}{M + \frac{1}{2}\lambda} a$ vel $\frac{\lambda}{M - \frac{1}{2}\lambda} e$ quamproxime.

Propositio III.

Syſtematis cujuſvis Logometrici conſtructionem exponere per Canonem Logarithmorum.

Caſ. 1. SI detur, è Syſtemate propoſito, menſura rationis alicujus determinatæ: rationis cujuſvis oblatæ menſura, erit ad menſuram illam datam determinatæ rationis, ut oblatæ rationis Logarithmus, ad Logarithmum rationis ejuſdem determinatæ.

Caſ. 2. Si non detur, è Syſtemate propoſito, menſura rationis alicujus determinatæ: inveniendus erit Modulus propoſiti Syſtematis, per Corollarium ſecundum Propoſitionis primæ. Et menſura cujuſvis oblatæ rationis, erit ad Modulum inventum, ut oblatæ rationis Logarithmus, ad Canonis Modulum.

Caſus hujus ultimi habentur Exempla in ſequentibus.

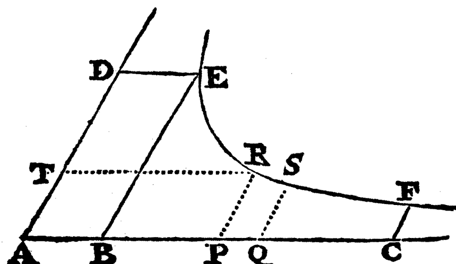
Propositio IV.

Spatium quodvis Hyperbolicum quadrare per Canonem Logarithmorum.

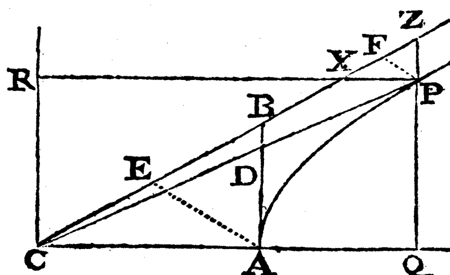
SIT Hyperbola quævis *ERSF* centro *A*, Aſymptotis *ABC*, *AD* deſcripta; & quæratur area *BEFC* quam claudunt rectæ *BE*, *CF* ad Aſymptoton *AD* parallelæ. Compleatur parallelogrammum *ABED*, & ad hunc Modulum inveniatur (per Propo-

 ſitionem

sitionem tertiam) mensura rationis inter *AC* & *AB* vel inter *BE* & *CF*: Dico mensuram inventam æqualem fore magnitudini areæ quæsitæ *BEFC*. Nam divisa concipiatur hujus areæ basis *BC* in particulas innumeras quam minimas *PQ*, ea lege, ut ubique detur ratio illa quæ est inter *AQ* & *AP*, & ducantur Asymptoto *AD* parallelæ *PR*, *QS*. Quoniam itaque est *AQ* ut *AP*; erit divisim *PQ* ut *AP*, hoc est, ut *PR* reciproce. Unde data est area *PRSQ*, quæ proinde potest haberi pro mensura rationis datæ quæ est inter *AQ* & *AP*. Hujus autem mensuræ Modulus erit parallelogrammum *ABED*, per Corol. 2. Prop. 1. Nam si compleatur æquale parallelogrammum *APRT*; statim intelligetur, ita illud se habere ad aream *PRSQ*, ut se habet *AP* ad *PQ*. Similes ergo summas arearum atque rationum utrinque colligendo; area tota *BEFC* erit mensura rationis totius quæ est inter *AC* & *AB*, vel inter *BE* & *CF*, ad eundem Modulum *ABED*.



Aliter. Sit rursus Hyperbola quævis *AP*, centro *C* atque Asymptoto *CB* descripta; & quæratur area Sectoris cujuslibet *CAP*, semidiametris *CA*, *CP* curvæque *AP* interjecti. Producta semidiametro utravis *CAQ* ultra verticem *A*, ducatur illius conjugata *CR*; & ad ipsas *CQ*, *CR* ordinatim applicentur à puncto *P* rectæ *PQ*, *PR*, quæ Asymptoto *CB* occurrant in *Z* & *X*; deinde agatur *AB* quæ Hyperbolam tangat in *A*, Asymptoton secet in *B* rectamque *CP* in *D*: & Triangulo *ABC* existente Modulo, area quæsita sectoris *CAP* erit mensura rationis inter *QZ* + *QP* & *AB*, sive rationis inter *AB* & *QZ* — *QP*, sive



ſive ſubduplicatæ rationis inter $QZ+QP$ & $QZ-QP$, ſive ſubduplicatæ rationis inter $AB+AD$ & $AB-AD$; vel erit menſura rationis inter $RP+RX$ & CA, vel rationis inter CA & $RP-RX$, vel ſubduplicatæ rationis inter $RP+RX$ & $RP-RX$. Nam ſi ducantur rectæ AE, PF quæ ſecent Aſymptoton CB in E & F, alterique Aſymptoto parallelæ ſint: æquales erunt hæ omnes rationes rationi quam habet AE ad PF, vel CF ad CE; erit & ſector CAP areæ $EAPF$ æqualis; ſimiliterque triangulum ABC duplicato triangulo AEC, ſive parallelogrammo Aſymptotis & Hyperbolæ inſcripto æquabitur. Quare patet propoſitum ex ſupra demonſtratis.

Data vero per modum priorem area $BEFC$, vel per modum poſteriorem area CAP; dabitur alia quævis area Hyperbolica ad arcum EF, vel ad arcum AP terminata: quippe quæ ſemper eſt areæ modo inventæ & areæ alicujus rectilineæ vel ſumma vel differentia. *Q. E. I.*

Scholium.

Hinc facilem habent ſolutionem Problemata omnia, quæcunque pendent ab Hyperbolæ quadratura. Exemplum ſatis luculentum præbebit deſcenſus gravium in Mediis, quorum reſiſtentia eſt in duplicata ratione velocitatis corporis moti. Sit V velocitas maxima quam corpus in hujuſmodi Medio, infinite deſcendendo, poteſt acquirere; T dimidium temporis quo corpus idem in eodem Medio, vi ſola ponderis ſui relativi, abſque reſiſtentia cadendo velocitatem illam acquiret; S ſpatium hocce caſu deſcriptum; R pondus relativum corporis in Medio reſiſtente: & quæratur ſpatium s quod corpus deſcendens, tempore quovis t, deſcribet in Medio reſiſtente; & reſiſtentia r quam patitur in fine illius temporis; & velocitas v ex iſto deſcenſu acquiſita.

Centro D, vertice A deſcribatur Hyperbola æquilatera AT, cujus una Aſymptotorum eſt DC & ad verticem tangens AC ſemiaxi AD æqualis. Capiatur area DAT ad dimidium trianguli DAC ut t ad T, ſecetque DT tangentem AC in P:

&

& erit v ad V ut AP ad AC. Sit AK ipsis AC, AP tertia proportionalis: & erit r ad R ut AK ad AC. Ad tangentem AC erigantur normales CZ, KN, AB; centroque C & Asymptotis CA, CZ describatur Hyperbola quævis BN: & erit s ad S ut area $ABNK$ ad rectangulum CKN. Patent hæc omnia per Propositiones octavam & nonam Libri secundi Philosophiæ *Newtonianæ*.

Est itaque t ad T ut area Hyperbolica DAT ad dimidium trianguli DAC, hoc est, ut dimidiata mensura rationis inter $AC+AP$ & $AC-AP$ ad illius mensuræ dimidiatum Modulum. Ergo si recta quævis EF producatur ad f, ita ut t sit mensura rationis inter Ef & EF ad Modulum T, & bisecetur Ff in G: erit GF ad GE ut AP ad AC, hoc est, ut v ad V. Sumantur GE, GF, GH continue proportionales: & erit GH ad GE ut AK ad AC, hoc est, ut r ad R. Erit insuper EG ad EH ut CA ad CK; unde cum sit s ad S ut area $ABNK$ ad rectangulum CKN, hoc est, ut mensura rationis inter CA & CK vel inter EG & EH ad mensuræ Modulum: erit s mensura rationis inter EG & EH ad Modulum S, atque inde dabitur.

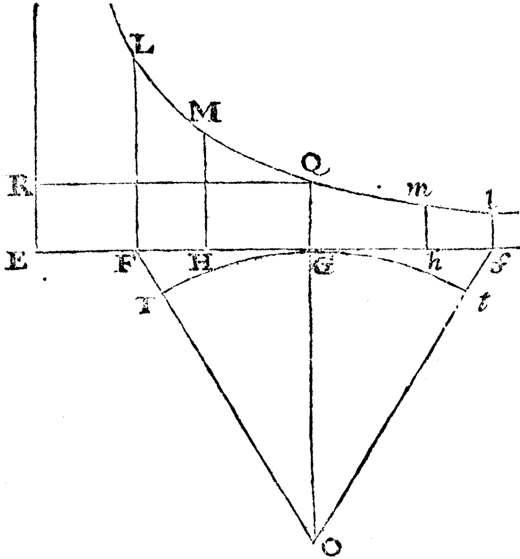


Ex hisce porro facillime se prodit, per unicam quamvis Hyperbolam, constructio non inconcinna; quam & adscribere visum est ob dignitatem Problematis. In recta quavis GE sumatur utcunque punctum F inter E & G, & ab altera parte capiatur Gf ipsi GF æqualis, & sint GE, GF, GH continue proportionales. Deinde per puncta E, F, H, G, f ducantur sibi invicem parallelæ rectæ ER, FL, HM, GQ, fl, quas secet Hyperbola quævis $LMQl$ centro E, Asymptotis ER, EG descripta, & compleatur parallelogrammum $EGQR$. Jam si sit t ad T ut area Hyperbolica $LFfl$ ad parallelogrammum EQ: erit s ad S ut area $MHGQ$ ad EQ; v ad V ut GF ad GE; r ad R ut GH ad GE.

Libet & casum alterum adjicere ubi corpus ascendit; ne forte analogia illa, quæ inter utrumque servari debet, in allata constructione quodammodo perire videatur. Ergo eadem atque prius denotantibus V, R, T, S, ponantur v & r pro velocitate & resistentia sub ascensus initio, s pro spatio quod corpus ascendendo describere possit antequam tota velocitas amittatur, t pro tempore hujus ascensus. Ad EG erigatur perpendicularis GO ipsi EG æqualis, & sumendo puncta F, f, ad easdem distantias hinc inde à puncto G,

jun-

jungantur OF, Of, quibus occurrat in T & t circuli arcus TGt centro O descriptus, & sint Gh, Gf, GE continue proportionales, & ducatur ipsi ER parallela hm Hyperbolæ occurrens in m. Deinde si t sit mensura anguli FOf ad Modulum T, hoc est, si t sit ad T ut arcus TGt ad radium OG: erit s mensura rationis inter Eh & EG ad Modulum S, vel erit s ad S ut area Hyperbolica $mhGQ$ ad EQ; & v erit ad V ut Gf ad GE; atque r ad R ut Gh ad GE.



PROPOSITIO V.

Logisticam describere per Canonem Logarithmorum.

SI ad Logisticæ $BQDG$ Asymptoton $APCF$ ordinatim applicentur binæ quævis rectæ AB, FG intercludentes Asymptoti portionem quamvis AF: erit illa portio mensura rationis quam ad invicem habent ordinatæ; hæc utique est natura Curvæ notissima. Integrum ergo & perfectum Systema Logometricum per hanc Lineam exhibetur: id quod etiam de Hyperbola dici potest per Propositionem præcedentem, de Spirali Æquiangula per subsequentem; nam

nam omitto complures alias Figuras, quæ & ipſæ dudum ſunt in Geometriam receptæ. Itaque ſi detur Aſymptoti poſitio & ſimul duo puncta per quæ Curva tranſire debet, dabuntur puncta reliqua per caſum priorem Propoſitionis tertiæ. Quod ſi data poſitione Aſymptoti, detur inſuper Syſtematis Modulus atque unicum punctum per quod ducenda erit Curva; invenientur puncta reliqua per Caſum poſteriorem Propoſitionis ejuſdem. Iſte vero Modulus quo pacto definiendus ſit, & qualem habeat magnitudinem, jam oportet exponere.

Ducatur recta BC quæ Curvam tangat in B & Aſymptoton ſecet in C. Dico primo, magnitudinem ſubtangentis AC eandem permanere ubicunque ſumatur punctum B. Intelligatur enim Ordinata PQ viciniſſima Ordinatæ ARB, recta vero QR parallela Aſymptoto AC, ac detur Ordinatarum intervallum illud quam minimum AP. Ob datam igitur lineolam AP, dabitur ratio quam habet AB ad PQ, & diviſim ratio quam habet AB ad RB, atque adeo (propter ſimilia triangula BAC, BRQ) ratio quam habet AC ad RQ ſive AP, atque inde magnitudo ipſius AC.

Dico ſecundo, determinatam hanc & immutabilem ſubtangentem AC, eſſe Modulum ad quem exigendæ ſunt menſuræ illæ interceptæ AF. Patet hoc per Corollarium ſecundum Propoſitionis primæ: nam dum termini AB & PQ ad æqualitatem proxime accedunt, erit AC ad AP, quæ metitur rationem inter AB & PQ, ut terminus AB ad terminorum differentiam BR. Unde data ſubtangente, facilis eſt deſcriptio Curvæ & ſolutio Problematum omnium quæ exhinc pendent.

Si Curva jam deſcripta habeatur, ſubtangentis magnitudo ſic determinabitur. Producatur Ordinata quævis CD ad E, ita ut CE ad CD rationem habeat Modularem, per Corollarium ſextum Propoſitionis primæ definitam; & recta EB quæ à puncto E parallela ducitur Aſymptoto, quæque Curvæ occurrit in puncto B, æqualis erit ſubtangenti quæſitæ.

Corol.

Corol. 1. Area *ABIH*, quæ inter Curvam *BDI* & Asymptoton ejus *ACH* infinite versus *HI* extenditur, & ad alteram partem ab Ordinata *AB* terminatur, æqualis est parallelogrammo *ABEC* ab Ordinata eadem *AB* & subtangente *AC* comprehenso. Componuntur enim area & parallelogrammum ex elementis quæ sunt ut $AP \times AB$ & $AC \times RB$, quæque adeo æquantur propter analogiam inter *AP* & *RB*, *AC* & *AB*.

Corol. 2. Atque hinc, ob datam subtangentis magnitudinem, area illa indefinita erit ut Ordinata ad quam terminatur.

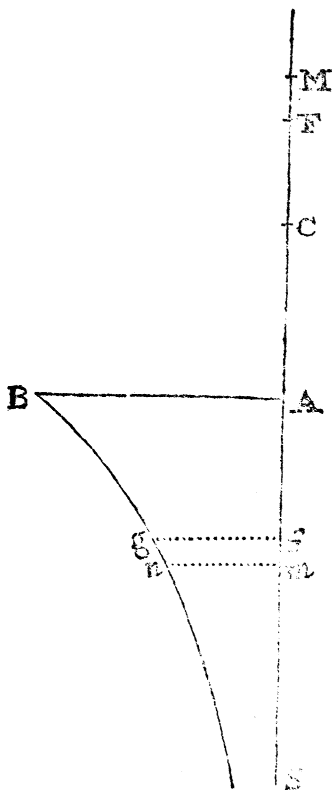
Scholium.

Hujus Propositionis usus per Exemplum declarabitur. Proponatur ad quamlibet altitudinem à superficie telluris, invenire densitatem Atmosphæræ. Sit *AB* telluris superficies, & abinde sursum producatur perpendicularis *AH*, atque ad hujus puncta singula ductæ concipiantur Ordinatæ *FG*, quæ sint ut Aeris densitates in locis *F*; & Ordinatarum termini omnes *G* in Linea Logistica *BDGI* siti erunt. Patet hoc per Corollarium secundum hujus Propositionis. Nam area indefinita *FGIH* est ut quantitas seu pondus Atmosphæræ supra locum *F*, & pondus illud est vis quæ comprimit Aerem in hoc loco, isthæc vero vis (uti docet Experientia multiplex) est ut Aeris compressi densitas *FG*.

Itaque si quotlibet altitudines sumantur in Arithmetica progressione: densitates Aeris in his altitudinibus erunt in progressione Geometrica; & differentia binarum quarumvis altitudinum, erit mensura rationis quæ est inter densitates Aeris in istis altitudinibus.

Cessante vi gravitatis, ita jam per vim aliquam extraneam intelligatur Aeris facta compressio, ut eandem habeat ubique densitatem quam ad terræ superficiem; & quantitas ejus, quæ modo erat exposita per aream indefinitam *HABI*, nunc per æquale rectangulum *ABEC* exhibebitur. Atmosphæræ hujus homogeneæ altitudo *AC*, est ad altitudinem Hydrargyri in tubo *Torricellii*, ut gravitas Hydrargyri ad gravitatem Aeris; atque inde datur. Huic autem datæ altitudini æquatur (per Corol. 1.) subtangens Curvæ *BDGI*, atque adeo Modulus Systematis mensurarum omnium *AF*. Est ergo Logarithmus rationis inter densitates Aeris in binis quibusvis altitudinibus, ad Modulum Canonis, ut altitudinum earundem differentia, ad Atmosphæræ prædictæ homogeneæ altitudinem illam datam *AC*.

Hæc ita se habent ex Hypothesi, quod vis gravitatis eadem sit ad omnes altitudines. Ceterum ex Philosophia *Newtoniana* constat eam diminui, in recessu à centro telluris, in duplicata ratione distantiæ: conclusio itaque paulo aliter se habebit. Sit *S* centrum telluris, & *AB* superficies ejusdem; sumatur ipsis *SF*, *SA* tertia proportionalis *Sf*, erigatur ordinata *fg* quæ sit ut Aeris densitas in *F*: & Curva *Bgn* quam punctum *g* perpetuo tangit, erit eadem atque prius Logistica, sed inverso situ. Augeatur enim altitudo *AF* particula quam minima *FM*, capiatur *Sm* ad *SA* ut *SA* ad *SM*, ducatur Ordinata *mn* quæ sit ut Aeris densitas in *M*; & erit *Sm* ad *Sf* ut *SF* ad *SM*, & divisim *fm* ad *FM* ut *Sf* ad *SM*, sive ut *Sf* ad *SF*, hoc est, ut *SAq* ad *SFq*. Unde *fm* est ut *SFq* inverse & *FM* directe, id est, ut gravitatio & moles Aeris inter *F* & *M* conjunctim; adeoque *fm*×*fg* sive area *fgnm* est ut gravitatio, moles & densitas ejusdem Aeris conjunctim, hoc est, ut pressio illius in Aerem inferiorem: & summa similium omnium arearum infra *fg* est ut summa pressionum omnium supra *F*, id est, ut Aeris in *F* densitas *fg*: & summarum differentia *fgnm* ut densitatum differentia *fg* — *mn*. Detur lineola *fm*; & erit *fg* ut area *fgnm*, adeoque ut *fg*—*mn*, atque inde (componendo) ut *mn*. Ergo data lineola *fm* erit mensura datæ illius rationis quæ est inter *fg* & *mn*: atque hinc patet Curvam *Bgn* esse Logisticam. Sed & eandem esse cum supra descripta Logistica, facile abinde colligitur, quod ordinatæ basi *AB* vicinissimæ & ad æqualia intervalla quam minima dispositæ, respective sint æquales in utraque Curva; ac proinde eadem curvatura, eadem inclinatio tangentis ad punctum *B*, eademque subtangentis magnitudo.



Ergo si distantiæ SF à centro telluris, capiantur in Musica progressione; harum reciprocæ, nempe distantiæ Sf, erunt in progressione Arithmetica; & Aeris densitates fg erunt in progressione Geometrica.

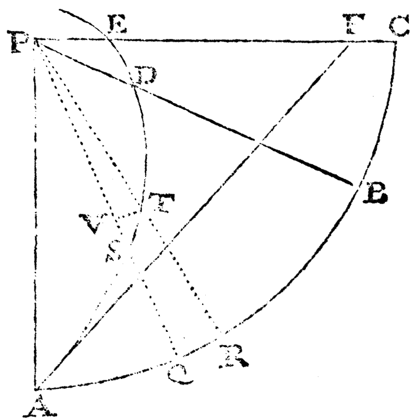
Ad inveniendam itaque densitatem in loco quovis F, minuenda est altitudo AF in ratione distantiæ SF ad telluris semidiametrum SA: & Logarithmus rationis inter densitates Aeris in A & F, erit ad Modulum Canonis, ut altitudo illa diminuta Af, ad Atmosphæræ homogeneæ altitudinem AC.

Quæ supra demonstrata sunt, accurate obtinebunt, si modo Atmosphæra ex Aere pariter Elastico tota constet: rationes igitur allatas paululum conturbabunt admisti vapores atque exhalationes, quibus etiam accedet Caloris Frigorisque diversa temperies ad altitudines diversas.

Propositio VI.

Logarithmorum Canonem ad Spiralem Æquiangulam accomodare.

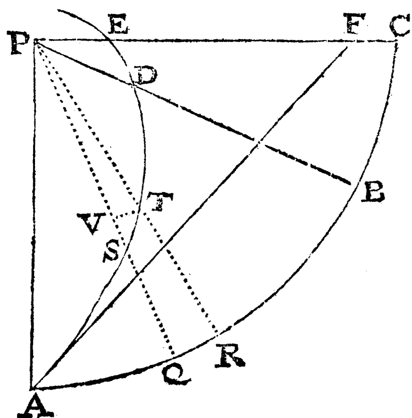
Æquiangula Spiralis appellatur Linea illa curva ADE, quæ polo P descripta, in eodem dato angulo secat exeuntes à polo radios PA, PD, PE, &c.



Si centro P & intervallo quovis PA describatur circulus ABC, qui radiis PA, PD, PE occurrat in A, B, C: Dico interceptum arcum BC mensuram fore rationis quam habet PD ad PE, & interceptum arcum AB mensuram rationis quam habet PA ad PD. Dividatur enim arcus AB in particulas quam minimas & æquales QR, & jungantur PQ, PR secantes Spiralem ad S & T in angulis datis PST, PTS: & ob datam particulam QR, dabitur angulus QPR, atque adeo species Figuræ SPT, & ratio laterum PS, PT. Data ergo particula QR mensura erit rationis datæ quam

habet

habet *PS* ad *PT*; & summa particularum, nempe arcus *AB*, mensura erit summæ similis rationum, hoc est, rationis quam habet *PA* ad *PD*. Et eodem argumento, erit arcus *BC* mensura rationis quam habet *PD* ad *PE*.

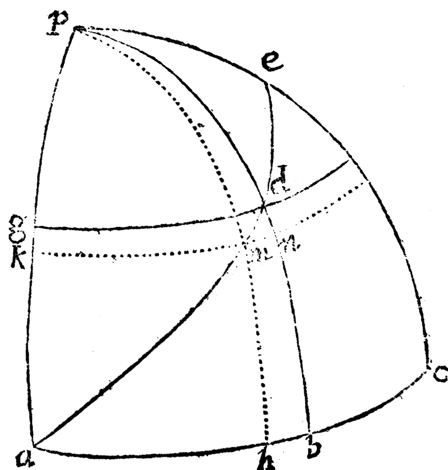


Ducatur *AF* Spiralem tangens ad Circuli & Spiralis intersectionem *A*, huic vero in *F* occurrat recta *PC* quæ ad radium *PA* normalis erigitur: & subtangens *PF* erit mensurarum Modulus, per Corol. 2. Prop. 1. Nam si in recta *PS* sumatur *PV* ipsi *PT* æqualis, & jungantur puncta *V*, *T*; similia erunt triangula *PAF*, *VST*. Unde *PF* est ad *VT* ut *PA* ad *VS*, sed & *VT* est ad *QR* ut *PT* ad *PA*: ergo ex æquo perturbate, *PF* est ad *QR* quæ metitur rationem inter *PS* ad *PT*, ut terminus *PT* ad terminorum differentiam *VS*.

Scholium.

Spiralem æquiangulam, ad Meridianæ Nauticæ divisionem demonstrandam, feliciter adhibuit Geometra clarissimus *Edmundus Halleius*. Sit *acp* pars octava Sphæræ terrestris, *p* Polus, *ac* quadrans Æquatoris, *ap* quadrans Meridiani; & quæratur magnitudo rectæ, quæ propositum quemlibet hujus arcum designet in Planisphærio. Per Æquatoris & Meridiani intersectionem *a*, ducta intelligatur linea Helicoeides *ade* quæ secet omnes Meridianos ad angulum semirectum, huic occurrat in *d* parallelus Æquatori circulus *gd*, per idem punctum *d* agatur Meridianus *pdb*; & longitudo intercepti arcus Æquatoris *ab*, erit magnitudo Nautica quæsita arcus *ag*. Resolvatur enim arcus *ag* in particulas innumeras quam minimas *gk*, ducatur parallelus *kmn*, secans Meridianum *pdb* in *n*, Lineam *ade* in *m*; & actus Meridianus *pmh* abscindet Æquatoris particulam *bh*, quæ erit ad *mn*, sive huic (ob angulum semirectum *mdn*) æqualem *dn* vel *gk*, ut peripheria Æquatoris ad peripheriam paralleli *kmn*. Est ergo particula *bh* magnitudo Nautica particulæ *gk*, & summa particularum omnium *bh*, nempe longitudo arcus *ab*, magnitudo Nautica

tica summæ particularum omnium *gk*, id est, arcus *ag*. Manente jam Æquatore *abc* vel *ABC*, concipiatur Sphærica superficies in plano ejus Stereographice depingi; & Polo *p* occupante centrum *P*, projicientur Meridiani *pga*, *pdb*, *pec* in totidem rectas *PA*, *PDB*, *PEC* à centro *P* exeuntes, ita ut distantia abinde puncti cujusvis *D* vel *A*, tangens sit arcus dimidiati *pd* vel *pa* quem distantia illa repræsentat. Linea vero Helicoeides *ade* convertet se in Spiralem æquiangulam *ADE*, polo *P* descriptam, & secantem radios suos omnes ad angulum semirectum. Hoc siquidem postulat nota Lex hujusce Projectionis, ut anguli omnes eandem in Plano ac in Sphærica superficie magnitudinem servent. Arcus itaque propositi *ag* magnitudo Nautica *ab* vel *AB*, est ad subtangentem *PF* vel huic jam æqualem Sphæræ radium *PC*, ut Logarithmus rationis inter *PA* & *PD*, hoc est, inter tangentes dimidiatorum arcuum *pa* & *pd*, vel *pa* & *pg*, ad Modulum Canonis.

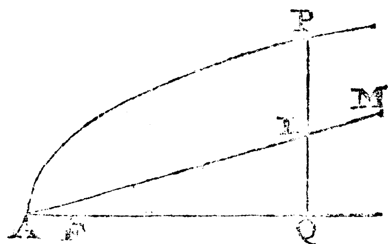


Hinc quoniam longitudo Radii est ad longitudinem arcus minuti unius primi, ut 3437,74677078493 9 &c ad 1, & reciprocus Moduli Canonis est 2,302585092994 &c, atque hi numeri in se multiplicati efficiunt 7915,704467897819 &c: si magnitudo illa Nautica *AB* in minutis primis exhibenda sit, uti mos exigit; subducta tangente artificiali dimidiati arcus *pg* à tangente artificiali dimidiati arcus *pa*, multiplicetur residuum per numerum 7915,704467897819 &c, et factus dabit partes Meridionales desideratas. Perinde vero se habebit conclusio, sive in Æquatore, sive extra hunc alibi ad utramvis partem locetur punctum *a*.

SCHO-

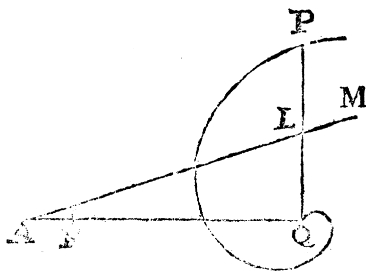
Scholium Generale.

In eum potissimum finem præcedentia conscripsi, ut allatis aliquot Exemplis ostenderem, qua commodissima ratione Logarithmorum usus in Geometriam recipi, & ad resolutionem Problematum difficiliorum adhiberi possit. Visum est hoc loco nonnullas adjicere porro constructiones, eodem consilio effectas, quæ mihi ista tractanti subinde sese obviam non invitæ dederunt: ut ita, ex uberiore specimine, de præstantia Methodi hujus Logometricæ judicium feratur.



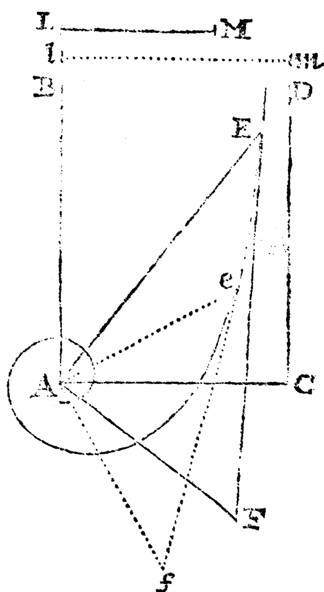
Parabolæ *Apollonianæ* AP sit A vertex, F focus, AQ axis, PQ ordinatim applicata ad axem. Ducatur AL quæ bifariam secet PQ in L, & productæ adjiciatur LM quæ sit mensura rationis inter $LA+AQ$ & QL ad Modulum AF: & recta AM æqualis erit arcui Parabolico AP.

Spiralis *Archimedea* PQ similem habet extensionem in rectam. Sit Q polus ejus, QP radius à polo ductus ad Curvæ quodlibet punctum P, & ad eum radium normalis QA. Ducatur LA parallela tangenti Spiralem in P, quæ radium PQ bifariam secet in L; & ponendo AF ad QL ut QL ad QA, ipsi AL adjiciatur LM quæ sit mensura rationis inter $LA+AQ$ & QL ad Modulum AF: & recta AM æquabitur Spiralis arcui PQ.



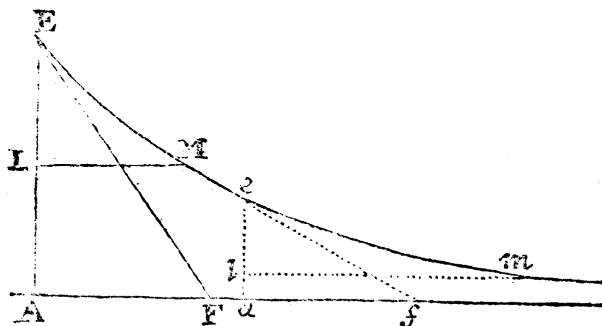
Spiralis Reciprocæ AeE sit A polus, AB radius primus & infinitus, CD asymptotos radio primo parallela ad distantiam AC; & invenienda proponatur hujusce Curvæ longitudo. Inter Spiralem illam vulgarem *Archimedis* atque hanc, quam Reciprocam appello, isthæc intercedit differentia, quod cum illius radii sint ut anguli quos faciunt cum radio suo primo, hujus radii è contrario

sunt



ſunt reciproce ut iidem anguli: eandem utique proportionem habet radius AE ad radium Ae quam habet angulus eAB ad angulum EAB. Unde facile colligitur, ſi ad puncta E & e ducantur tangentes EF, ef, & ad radios AE, Ae erigantur normales AF, Af, fore normales iſtas ſibi invicem & Aſymptoti intervallo AC æquales. Invenietur autem longitudo cujuſvis arcus Ee, ponendo LM menſuram rationis inter AE & $EF - AF$ ad Modulum AF, & ſimiliter lm menſuram rationis inter Ae & $ef - Af$ ad æqualem Modulum Af. Nam ſi tangentium differentiæ $EF - ef$ adjiciatur menſurarum differentia $lm - LM$, aggregatum æquabitur arcui Ee.

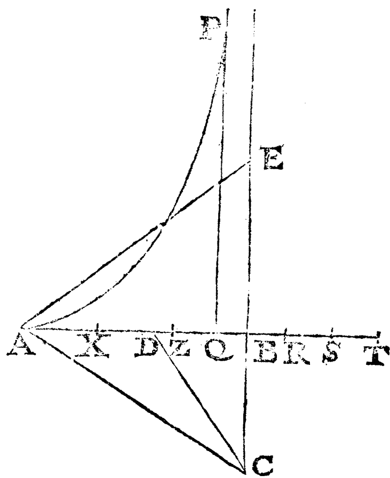
Linea illa Logiſtica, cujus aliquas expoſuimus affectiones in Propoſitione quinta, non abſimilem habet longitudinis ſuæ determinationem; quam & hoc loco apponam in eorum gratiam qui hujuſ-



modi contemplationibus delectantur. Oblata ſit igitur Logiſtica $EMem$, cujus Aſymptotos $AFaf$: & quæratur longitudo cujuſvis arcus Ee. Demiſſis in Aſymptoton perpendiculis ELA, ela, &

& ductis tangentibus EF, ef, capiatur AL æqualis exceſſui quo tangens EF ſuperat ſubtangentem AF, & ſimiliter al æqualis exceſſui quo tangens ef ſuperat ſubtangentem af: & actis LM, lm Aſymptoto parallelis, ſi tangentium differentiæ $EF - ef$ adjiciatur parallelarum differentia $lm - LM$, aggregatum æquabitur arcui Ee.

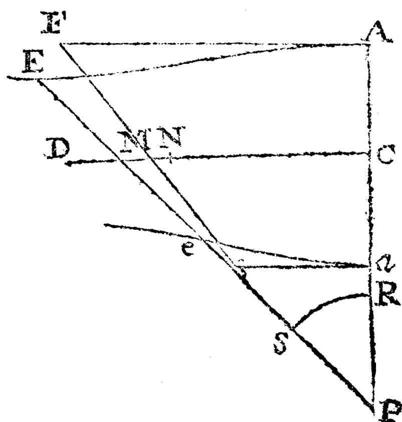
Accedo ad Ciſſoidem *Diocleam*. Sit A vertex ejus AB diameter Circuli genitoris, BC Aſymptotos, PQ perpendicularis in diametrum demiſſa, Ciſſoidi in P & diametro in Q occurrens. Agatur AC quæ ſecet Aſymptoton in C ac faciat angulum BAC qui ſit recti pars tertia, ſumptaque inter BQ & BA media proportionali BD jungatur CD; denique per medium perpendiculum PQ ducatur AE recta, quæ occurrat Aſymptoto in E: & Ciſſoidis arcus AP æquabitur duplicato exceſſui rectæ AE ſupra diametrum AB, & ſimul triplicatæ menſuræ rationis inter $BA + AC$ & $BD + DC$ ad Modulum BC.



Si Ciſſoidis area APQ convertatur circum axem AQ; generabitur ſolidum cujus dimenſio pendet à Logometria, & ſic conſtruitur. Sint AQ, AB, AR, AS, AT continue proportionales; deinde ad Modulum TS capiatur QX menſura rationis inter AB & BQ, & retro ponatur XZ æqualis ipſi SR una cum dimidio ipſius RB ac triente ſimul ipſius BQ: & ſolidum Ciſſoidale axem habens AQ baſiſque ſemidiametrum PQ, æquabitur Cylindro cujus eadem eſt baſis & cujus altitudo eſt QZ.

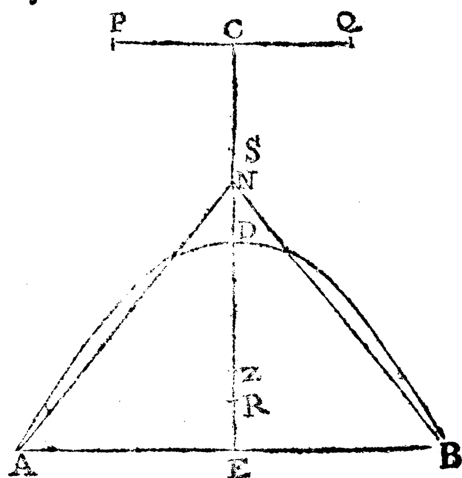
Adjungam ſolidum ex Conchoide *Nicomedis* genitum. Sint AE, ae Curvæ conjugatæ, polo P, regula CD, intervallo CA vel Ca, axe $PaCA$ ad regulam normali, verticibuſque A & a deſcriptæ. Per polum P ducatur ad libitum recta $PeDE$, regulæ occurrens in D, Lineæ vero in E & e: & ex natura Conchoidis, erunt ſegmenta DE, De intervallo CA vel Ca æqualia. Eodem intervallo centroque P deſcribatur circuli arcus RS ſecans axem PC in R & rectam

rectam PD in S: & semisumma solidorum Conchoidalium quæ generantur ex conversione Figurarum $AEDC$, $aeDC$ circum axem AaP, erit ad sectorem Sphæræ genitum ex circuli sectore PRS circum axem eundem converso, ut $3PC \times PD + PRq$ ad PRq. Eorundem vero semidifferentia Cylindro æquatur, cujus basis est circulus diametro Aa descriptus, & cujus altitudo est mensura duplicata rationis inter PD & PC ad Modulum PC.



Area vero Figuræ totius $AEea$ æquatur rectangulo cujus basis est Aa, & cujus altitudo CM est mensura rationis inter $PD + DC$ & PC ad Modulum PC. Quod si desideretur quadratura partium $AEDC$, $aeDC$; ductis ad axem normalibus AF, af, in regula CD sumenda est CN quæ sit anguli CPD mensura ad eundem Modulum PC: & acta per punctum M recta FMf quæ parallela sit rectæ jungenti puncta P, N, quæque occurrat normalibus in F & f; erit area $AEDC$ æqualis Trapezio $AFMC$, & area $aeDC$ æqualis Trapezio $afMC$.

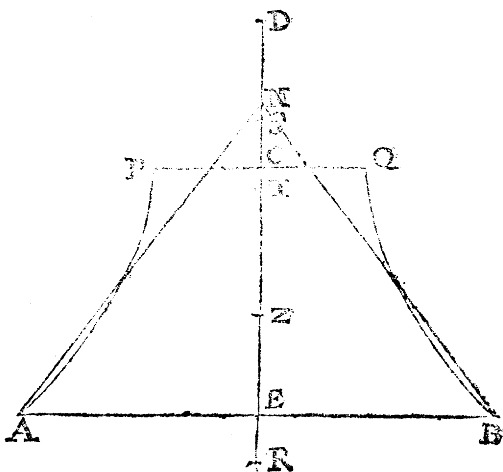
Hyperbolæ quadraturam in superioribus expositam dedi, eo modo, qui mihi visus est ad propositum quam maxime accommodatus. Libet aliam constructionem hoc loco apponere, & simul adjicere gravitatis centrum. Oblata sit portio interior ADB, interclusa curvæ ADB & rectæ cuivis AB ad diametrum PQ parallelæ. A Figuræ centro C producatur diameter CDE, quæ basin AB bifariam secet in E; deinde si in diametro



producta sumantur CR ad CD, & CD ad CS, ut basis AB ad diametrum PQ, & ad Modulum CS fiat CN mensura rationis quam habet CD ad ER: triangulum rectilineum ANB æquabitur areæ curvilineæ ADB.

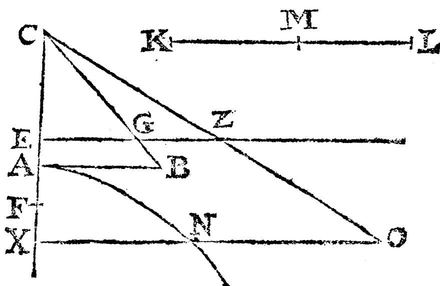
Hujus autem areæ centrum gravitatis Z invenietur, capiendo CZ ad CR ut $2CR$ ad $3EN$.

Sit nunc oblata portio exterior $APQB$, interclusa curvis oppositis AP, BQ, diametro PQ, & rectæ cuivis AB ad diametrum illam parallelæ. Esto CD conjugatæ semidiametri longitudo extra portionem oblatam $APQB$ posita, quæ producta in contrariam partem centri C bifariam secet basim AB in E. Deinde in diametro producta si sumantur CR ad CD, & CD ad CS, & CS ad CT, ut basis AB ad diametrum PQ, ponantur vero CR & CT ad eandem centri partem cum basi AB; & ad Modulum CS, in contrariam centri partem, sumatur CN mensura rationis quam habet CD ad ER: triangulum rectilineum ANB æquabitur areæ curvilineæ $APQB$.



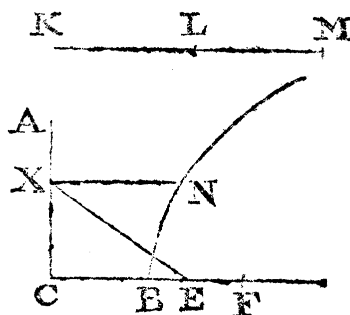
Hujus autem areæ centrum gravitatis Z invenietur, capiendo CZ ad CR ut $2TR$ ad $3EN$.

Pergo ad superficies ab Hyperbola circum axes suos convoluta genitas. Sit AN Hyperbola descripta vertice A, centro C, Asymptoto CB, foco F, semiaxe principali AC, semiaxe conjugato AB normali ad AC; & ad axis AC punctum quodvis X sit XN ordinatim applicata, quæ Hyperbolæ occurrat ad N.

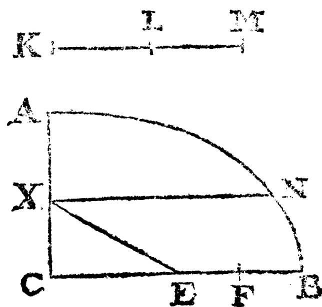


In axe CA capiatur CE ad CA ut CA ad CF; & ad eundem axem erecta perpendiculari EZ, quæ Asymptoto occurrat in G, angulo CEZ inscribatur æqualis ipsi CX recta CZ, quæ porro producta secet ordinatim applicatam XN ad O. Tum sumatur KL quæ sit æqualis excessui quo XO superat AB, atque LM quæ sit mensura rationis inter $CZ + ZE$ & $CG + GE$ ad Modulum CE: & superficies genita ex arcus AN conversione circum axem AX, erit ad Circulum semidiametro AB descriptum, ut excessus KM quo KL superat LM, ad semidiametrum illam AB.

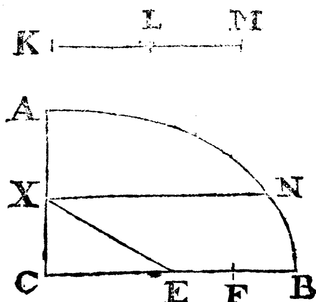
Sit rursus BN Hyperbola descripta vertice B, centro C, foco F, semiaxe principali CB, semiaxe conjugato CA normali ad CB; & ad axis AC punctum quodvis X sit XN ordinatim applicata, quæ Hyperbolæ occurrat ad N. In axe CB capiatur CE ad CA ut CA ad CF, & jungatur EX. Tum sumatur KL quæ sit ad XC ut XE ad CE, & LM quæ rationis inter $EX + XC$ & CE mensura sit ad Modulum CE: & superficies genita ex arcus BN conversione circum axem CX, erit ad Circulum semidiametro CB descriptum, ut linearum KL & LM aggregatum KM, ad semidiametrum illam CB.



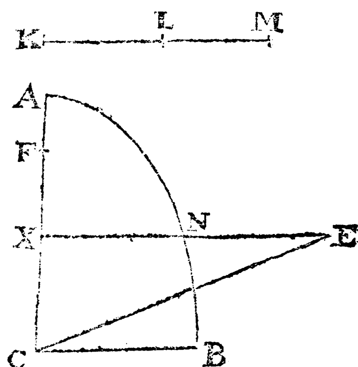
His addere licebit ab Ellipsi genitas superficies. Sit ANB Ellipsis descripta centro C, verticibus A & B, foco F, semiaxe principali CB, semiaxe conjugato CA; & ad axis CA punctum quodvis X sit XN ordinatim applicata, quæ Ellipsi occurrat ad N. In axe CB capiatur CE ad CA ut CA ad CF, & jungatur EX. Tum sumatur KL quæ sit ad XC ut XE ad CE, & LM quæ rationis inter $EX + XC$ & CE mensura sit ad Modulum CE: & superficies genita ex arcus BN



conversione circum axem CX, erit ad Circulum semidiametro CB descriptum, ut linearum KL & LM aggregatum KM, ad semidiametrum illam CB. Ut hæc ultima constructio locum habeat, oportet semiaxem CA circa quem conversio facta est, minorem esse altero semiaxe CB; aliter enim Moduli CE quantitas $\frac{CAq}{\sqrt{CBq - CAq}}$ evadet impossibilis, & constructio illa Logometrica (quod in hujusmodi casibus fieri solet) convertet se in Trigonometricam, qualis illa est quæ jam sequitur.



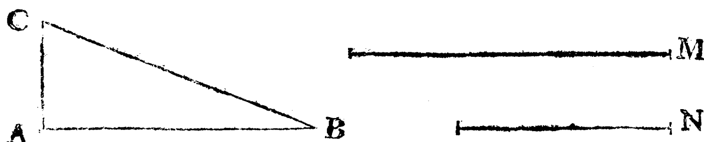
Sit ANB Ellipsis descripta centro C, verticibus A & B, foco F, semiaxe principali CA, semiaxe conjugato CB; & ad axis CA punctum quodvis X sit XN ordinatim applicata, quæ Ellipsi occurrat ad N. Angulo CXN inscribatur recta CE, quæ sit ad CA ut CA ad CF. Tum sumatur KL quæ sit ad XC ut XE ad CE, & LM quæ anguli XEC mensura sit ad Modulum CE, hoc est, quæ sit æqualis arcui cujus sinus est XC ad radium CE: & superficies genita ex arcus BN conversione circum axem CX, erit ad Circulum semidiametro CB descriptum, ut linearum KL & LM aggregatum KM, ad semidiametrum illam CB. Posset hujus etiam superficiei dimensio per Logometriam designari, sed modo inexplicabili. Nam si quadrantis circuli quilibet arcus, radio CE descriptus, sinum habeat CX sinumque complementi ad quadrantem XE: sumendo radium CE pro Modulo, arcus erit rationis inter $EX + XC\sqrt{-1}$ & CE mensura ducta in $\sqrt{-1}$. Verum isthæc aliis, quibus operæ pretium videbitur, diligentius excutienda relinquo. Ceterum ex præcedentibus intelligi potest, quanta sit cognatio inter angulorum atque rationum mensu-



mensuras, quamque levi mutatione in se invicem facillime convertantur pro variis ejusdem Problematis casibus. De Cubicarum æquationum radicibus dudum ab Analystis observatum est; vel eas exprimi posse per *Cardani* regulas, atque adeo per duarum mediarum proportionalium inventionem; vel per divisionem arcus circularis in tres æquales partes, si forte fuerint inexplicabiles per memoratas regulas. * Hoc animadvertit *Cartesius*, sed & ante *Cartesium* idem observavit *Franciscus Vieta* sub finem Supplementi Geometriæ. Exhinc autem aperte colligitur, qualis sit ordo Naturæ transeuntis ad Anguli trisectionem à trisectione Rationis.

Mirabilem illam Harmoniam ulterius declarare lubet, Exemplo desumpto ab eadem Figura circum axes suos convoluta. Sit igitur *APBQ* Ellipsis, axis ejus major *AB*, minor *PQ*, centrum *C*, focus *F*. Hæc circum axem utrumvis convoluta Solidum generet, cujus particulæ constantes ex materia homogenea, vires attractivas habeant in duplicata distantiarum ratione decrescentes: & quæratur vis qua Solidum illud attrahit corpusculum quodvis, in ejus super-

* Sublato etenim termino secundo, tres habentur Æquationum casus. Hi vero resolvuntur ope trianguli rectanguli *ABC*, rectum habentis angulum ad *A*, in quo insuper triangulo semper data sunt duo latera.



Cas. 1. Nam si sit $x^3 + 3aax = \pm 2aab$: ponantur $AB = a$, $AC = b$; & sumantur M & N binæ mediæ proportionales inter $BC + AC$ & $BC - AC$: & erit $M - N$ radix unica possibilis affirmativa, si habeatur $+2aab$; vel $N - M$ radix unica possibilis negativa, si habeatur $-2aab$.

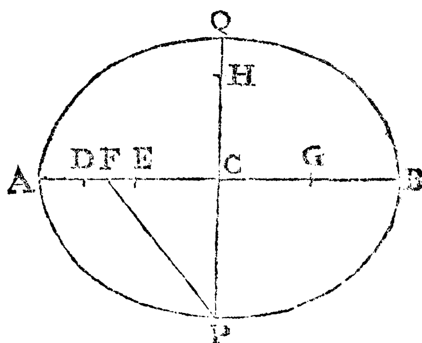
Cas. 2. Si sit $x^3 - 3aax = \pm 2aab$, existente a minore quam b: ponantur $AB = a$, $BC = b$; & sumantur M & N binæ mediæ proportionales inter $BC + AC$ & $BC - AC$: & erit $M + N$ radix unica possibilis affirmativa, si habeatur $+2aab$; vel $-M - N$ radix unica possibilis negativa, si habeatur $-2aab$.

Cas. 3. Denique si sit $x^3 - 3aax = \pm 2aab$, existente a majore quam b: ponantur $AB = b$, $BC = a$; & sumatur M sinus trientis angulorum summæ $A + B$, atque N sinus trientis angulorum differentiæ $A - B$, existente radio $2BC$: & erunt $-M$, $-N$, & $M + N$ tres radices possibiles, si habeatur $+2aab$; vel M, N, & $-M - N$ tres radices possibiles, si habeatur $-2aab$.

Atque ita Problemata omnia Solida solutionem facilem recipiunt, vel per Canonem Logarithmicum, vel per Canonem Trigonometricum.

ficie

ficie locatum ad axis illius terminum. Jungantur puncta P, F, ac ſumatur CD quæ ſit menſura rationis inter $PF + FC$ & CP ad Modulum CA, pariterque ſumatur CE quæ ſit anguli CPF menſura ad Modulum CP; ſitque FD exceſſus menſuræ CD ſupra CF, atque FE exceſſus ipſius CF ſupra menſuram CE: & Solidi convolutione circum axem majorem AB geniti vis in corpuſculum ad A locatum, erit ad Sphæræ homogeneæ & eodem axe deſcriptæ vim in idem corpuſculum, ut $3 FD \times CPq$ ad $CF cub$; Solidi autem converſione circum axem minorem PQ geniti vis in corpuſculum ad P locatum, erit ad Sphæræ homogeneæ & eodem axe deſcriptæ vim in idem corpuſculum, ut $3 FE \times CAq$ ad $CF cub$. Unde cum vis Sphæræ prioris in corpuſculum ad A, ſit ad vim Sphæræ poſterioris in corpuſculum ad P, ut CA ad CP: erit vis Solidi prioris in corpuſculum ad A, ad vim Solidi poſterioris in corpuſculum ad P, ut $FD \times CP$ ad $FE \times CA$.



Hinc quoniam Solidum poſterius medium eſt proportionale inter Solidum prius & Sphæram priorem: vis Solidi poſterioris in corpuſculum ad A, erit media proportionalis quamproxime inter vires Solidi prioris & Sphæræ prioris in idem corpuſculum ad A, ſi modo axes Ellipſeos ſint prope æquales. Itaque in hoc caſu, ponendo CG mediam proportionalem inter CF & $3 FD$, & capiendo CH ad $3 FE$ ut CA ad CF; poſterioris Solidi vires ad A & P, vel ad B & Q, erunt ad invicem quamproxime ut CG ad CH. Id quod non inutile præbet compendium ad inventionem Figuræ Telluris, qualem eam ſubtiliter inſtituit celeberrimus *Newtonus*, ſummus ille Philoſophiæ ſanioris Inſtaurator.

Conſideratio virium centripetarum aliud porro mihi ſuggerit Exemplum, in quo ſatis ampla ſe prodit mutationum varietas. Proponatur Trajectoriarum ſpecies enumerare, in quibus corpora moveri poſſunt, quæ à viribus centripetis in ratione diſtantiarum triplicata decreſcentibus agitantur, quæque de loco dato, cum data velocitate, ſecundum datam rectam egrediuntur.

Caſ. 1.

Cas. 1. Sit S centrum virium, exeatque corpus de loco P secundum rectam PQ vel QP, ea cum velocitate quam acquirere posset ab iisdem viribus, libere cadendo versus centrum S de loco C, & casu suo describendo altitudinem CP. In datam rectam QPT demittantur perpendicula SQ, CT, centroque S & intervallo $\sqrt{SQq + QTq}$ describatur circulus RTA, rectæ SPC occurrens in R: deinde ad Modulum $\sqrt{SCq - SRq}$ sit arcus RA mensura rationis inter $SR \pm \sqrt{SRq - SPq}$ & SP, jaceant autem arcus ille RA & punctum Q ad diversas partes rectæ SR; & punctum A erit Apsis summa Trajectoriæ. Exhinc vero Trajectoria dabitur, sumendo SM æqualem ipsi $\sqrt{SCq - SRq}$, deinde in recta SA capiendo longitudinem quamvis SD quæ sit minor quam SA, ad eandem erigendo perpendiculum DE secans circulum in E, & jungendo SE. Nam si ad utrasque partes puncti A ponatur arcus circularis AR, cujus longitudo sit mensura rationis inter $SE + ED$ & SD ad Modulum SM, & in semidiametris SR capiantur distantiæ SP æquales ipsi SD: erunt puncta P ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius SP, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis SAP, erit ut recta DE: nam area percursa æquatur ipsi DE in Modulum dimidiatum $\frac{1}{2}SM$ ductæ. Velocitas vero corporis in loco quovis P, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem distantiam SP, cum iisdem viribus

revolvi

revolvi posset, ut $\sqrt{SCq - SPq}$ ad SC. Ex ipsa constructione patet, hanc Spiralem primam infinitis gyris circa centrum virium contorqueri, quin & seipsam infinitis vicibus decussare, & siti erunt Nodi omnes ad Apsidis lineam AS.

Cas. 2. Recedat punctum C ad infinitam distantiam à centro S; & corporis de loco P secundum rectam PM vel MP exeuntis ea sit velocitas, quam acquirere posset cadendo libere ad eundem locum P ab infinita distantia. Ad rectam SP ducatur normalis SM, quæ secet PM in M; deinde centro S & intervallo SP describatur circulus, & in ejus circumferentia capiatur arcus PX, cujus longitudo sit mensura rationis inter distantiam quamvis SD & distantiam datam SP ad Modulum SM, jaceant autem arcus ille PX & punctum M ad diversas partes rectæ SP si SD fuerit major quam SP, aliter ad easdem, inque semidiametro SX ponatur SZ æqualis ipsi SD; & punctum Z erit ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius SZ, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis SPZ, erit ut differentia quadratorum ex SZ & SP: Nam area percursa, est ad illam differentiam, in data ratione Moduli dimidiati $\frac{1}{2}SM$ ad SP. Velocitas vero corporis in loco quovis P, æqualis erit velocitati qua in Circulo, ad eandem distantiam SP, cum iisdem viribus revolvi posset. Ex constructione patet hanc secundam Spiralem esse Æquiangulam illam Propositionis sextæ; ea vero migrabit in Circulum ubi angulus SPM fit rectus.

Cas. 3. Ut velocitas sit adhuc major, abeat jam punctum C ad distantiam plusquam infinitam à centro S, vel (quod perinde est) accedat à parte contraria eidem centro, ad finitam distantiam; & corporis de loco P secundum rectam PQ vel QP exeuntis, ea sit velocitas, quam acquirere posset ascendendo libere de loco C ad infinitam distantiam, & deinde ab infinita distantia ex altera centri

parte

parte deſcendendo ad locum P, viribus centripetis inter aſcendendum in æquales vires centrifugas converſis. In datam rectam PQT demittantur perpendicula SQ, CT; & erit TQ vel major, vel æqualis, vel minor quam SQ. Si TQ fuerit major quam SQ; centro S & intervallo $\sqrt{TQq-SQq}$ deſcribatur circulus RBE rectæ SP occurrens in R, deinde ad Modulum $\sqrt{SCq-SRq}$ ſit arcus RB menſura rationis inter $SR \pm \sqrt{SRq+SPq}$ & SP, jaceant autem arcus ille RB & punctum Q ad partes diverſas rectæ SP. Exhinc Trajectoria dabitur, ſumendo SM æqualem ipſi $\sqrt{SCq-SRq}$, in recta SB capiendo longitudinem quamvis SD, ad eandem erigendo perpendiculum SE circulum ſecans in E, & jungendo DE. Nam ſi retro ponatur à puncto B circularis arcus BR, cujus longitudo menſura ſit rationis inter $SE+ED$ & SD ad Modulum SM, & in ſemidiametro SR capiatur diſtantia SP æqualis ipſi SD: erit punctum P ad Trajectoriam deſcribendam. Tempus autem quo radius SP, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis hujus Trajectoriæ, erit ut incrementum vel decrementum rectæ DE per tempus illud factum: nam area percurſa æquatur huic incremento vel decremento in Modulum dimidiatum $\frac{1}{2}SM$ ducto. Velocitas vero corporis in loco quovis P, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem diſtantiam SP, cum iiſdem viribus revolvi poſſet, ut $\sqrt{SCq+SPq}$ ad SC. Ex conſtructione patet, hanc Spiralem tertiam infinitis gyris centrum cingere infra punctum datum P; at ſupra idem punctum vel non undique cinget, ſi arcus RB minor fuerit quam circumferentia tota $RBER$; vel toties cinget, quoties arcus ille circumferentiam excedit.

Cas. 4. Reliquis manentibus, sint jam TQ & SQ æquales. Centro S & intervallo SP describatur circulus PXB, & sit arcus PB æqualis ipsi SC, jaceant autem arcus PB & punctum Q ad partes diversas rectæ SP. Exhinc Trajectoria dabitur, sumendo in recta SB longitudinem quamvis SD, centroque S & intervallo SD describendo circuli arcum DZ æqualem ipsi SC. Nam si ordine circulari contrario ponantur arcus PB à puncto P & arcus DZ à puncto D: erit punctum Z ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius SZ, a centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis SPZ, erit ut differentia radiorum SZ & SP: nam area percursa æquatur huic differentiæ ductæ in semissem distantiæ SC. Velocitas vero corporis in loco quovis P, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem distantiam SP, cum iisdem viribus revolvi posset, ut $\sqrt{SCq + SPq}$ ad SC. Ex constructione patet, hanc Spiralem quartam esse Reciprocam illam, cujus longitudinem supra dimensam dedimus.

Cas. 5. Reliquis adhuc manentibus, sit jam TQ minor quam SQ. Centro S & intervallo $\sqrt{SQq - TQq}$ describatur circulus RAE rectæ SP occurrens in R; deinde sit arcus RA, ad ejusdem circuli arcum cujus secans est SP, ut $\sqrt{SCq + SRq}$ ad SR; ponatur autem arcus ille RA ad easdem partes rectæ SP cum puncto Q: & A erit Apsis ima Trajectoriæ. Exhinc vero Trajectoria dabitur, sumendo SM æqualem ipsi $\sqrt{SCq + SRq}$, in recta SA capiendo longitudinem quamvis SD quæ sit major quam SA, ducendo DE quæ circulum tangat in E, & jungendo SE. Nam si ad utrasque partes puncti A ponatur arcus circularis AR, cujus longitudo mensura sit anguli DSE ad Modulum SM, & in semidiametris SR capiantur distantiæ SP æquales ipsi SD: erunt puncta

R ad

P ad Trajectoriam describendam. Tempus autem quo radius *SP*, à centro ad corpus motum ductus, percurret aream quamvis *SAP*, erit ut recta *DE*: nam area percursa æquatur ipsi *DE* in Modulum dimidiatum $\frac{1}{2}SM$ ductæ. Velocitas vero corporis in loco quovis *P*, erit ad velocitatem qua in Circulo, ad eandem distantiam *SP*, cum iisdem viribus revolvi posset, ut $\sqrt{SCq + SPq}$ ad *SC*.

Ex constructione patet, hanc quintam Spiralem vel nullum habere Nodum, vel unicum, vel plures, pro varia proportione rectæ *SM* ad diametrum circuli *EAR*: toties enim Trajectoria sese decussabit, quoties illa recta diametrum excedit, & Nodi omnes siti erunt ad Apsidis lineam *AS*.

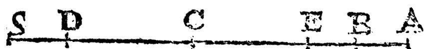
Sunt itaque Trajectoriarum quinque Species. Harum primam atque ultimam descripsit olim *Newtonus*, per Hyperbolæ & Ellipseos quadraturam.

Geometris integrum erit, ex adductis hactenus Exemplis de Methodo nostra judicare; quam quidem, si proba fuerit, ulterius excolere pergent & excolendo latius promovebunt. Patet utique campus amplissimus in quo vires suas experiri poterunt, præsertim si Logometriæ Trigonometriam insuper adjungant, quibus miram quandam affinitatem in se invicem euntibus intercedere notabam. Hisce quidem Principiis haud facile crediderim generaliora dari posse; cum

 tota

tota Mathesis vix quicquam in universo suo ambitu complectatur, præter angulorum & rationum Theoriam. Neque sane commodiora sperabit, qui animadverterit Effectionis facilitatem per amplissimas illas, omnibusque suis numeris absolutas, tum Logarithmorum tum Sinuum & Tangentium Tabulas, quas antecessorum nostrorum laudatissimæ solertiæ debemus acceptas. Ut vero tanti beneficii uberior nobis exsurgat fructus, id nunc exponendum restat, quibus artibus ad istiusmodi conclusiones rectissima perveniatur. In hunc finem Theoremata quædam, tum Logometrica tum Trigonometrica adjecissem, quæ parata ad usum asservo; ni consultius visum esset, quum absque nimiis ambagibus ea tradi non possent, intacta potius præterire atque aliis denuo investiganda relinquere. Ceterum isthoc apparatu non semper est opus; nam in Methodo Fluxionum sæpe evenit ut ipsæ Fluentes, omissis hujusmodi subsidiis, ad Logometriam satis commode revocentur: id quod uno atque altero Exemplo ostendam.

Egimus in præcedentibus de rectilineo Gravium descensu, per Medii resistentiam continuam retardato, ex Hypothesi quod illa resistentia esset in duplicata ratione velocitatis. Ex eadem Hypothesi resistentiam corporis penduli, in Cycloide oscillantis, jam sit propositum invenire. Cycloidis itaque in rectam explicatæ sit *AC* dimidium, *C* punctum infimum, *B* punctum à quo cadere incipit corpus pendulum, *BC*, *CD* arcus descensu ejus & subsequente ascensu descripti. Hisce positis, exquirenda est ratio quam habet resistentia corporis in loco quovis *E*, ad pondus ejus relativum in Medio resistente. Exponatur pondus illud per *AC*; & vis ab eodem oriunda, qua pendulum acceleratur ad *E*, exponetur per *CE*: quæ si dicatur x, & momentum ejus $+\dot{x}$; momentum arcus jam descripti *BE* erit $-\dot{x}$. Exponatur vis resistentiæ per z; & vis qua pendulum vere acceleratur, erit ut excessus vis prioris supra resistentiam, hoc est, ut $x-z$. Itaque cum resistentia sit ut quadratum velocitatis, resistentiæ momentum $\dot{z}$ erit ut velocitas & velocitatis momentum, hoc est, ut $-\dot{x}$ & $x-z$, sive ut $z\dot{x}-x\dot{x}$. Nam si tempus in particulas æquales dividatur, erit velocitas ut arcus descripti momentum $-\dot{x}$, & velocitatis momentum ut vis acceleratrix $x-z$ quæ momentum illud generat. Quoniam ergo $\dot{z}$ est ut $z\dot{x}-x\dot{x}$, si ca-



piatur

piatur quantitas invariabilis a, quæ sit idoneæ magnitudinis: erit $a\dot{z}=z\dot{x}-x\dot{x}$.

Ad hanc æquationem construendam, assumatur quantitas v quæ sit variabilis, & fingatur æquatio $z=p+qx+rv$, in qua notæ p, q, r designent alias novas quantitates invariabiles; & erit $\dot{z}=q\dot{x}+r\dot{v}$. Hisce porro valoribus ipsarum z & $\dot{z}$ substitutis in æquatione prima $a\dot{z}=z\dot{x}-x\dot{x}$, habebitur $\overline{aq-p}, \dot{x}+ar\dot{v}=\overline{q-1}, x\dot{x}+rv\dot{x}$. Ut hæc æquatio simplicior evadat, ponatur $q-1=0$, & $aq-p=0$; sive $q=1$, & $p=a$: & fiet $a\frac{\dot{v}}{v}=\dot{x}$, ac præterea $z=a+x+rv$. Jacentibus punctis D & S ad eandem partem puncti C, intelligatur CS æqualis ipsi a: & erit $z=SE+rv$, atque $CS\frac{\dot{v}}{v}=\dot{x}$. Sit valor quantitatis v, dum incidit punctum E in punctum C: & quantitas x, sive CE, æquabitur mensuræ rationis quam habet v ad c pro Modulo CS, per Propositionem primam: quam æqualitatem sic designare soleo, $CE=CS\left|\frac{v}{c}\right.$. Tota ergo Problematis difficultas jam revocatur ad binas illas æquationes $CE=CS\left|\frac{v}{c}\right.$, atque $z=SE+rv$: hæ vero deduci non poterunt in usum, priusquam determinatæ fuerint quantitates r & CS. Ad hoc efficiendum, duæ restant conditiones nondum adimpletæ; oportet enim resistentiam esse nullam, atque adeo quantitatem z sive $SE+rv$ evanescere, ubi punctum E in puncta B & D inciderit.

Sint ergo b & d valores ipsius v, dum incidit punctum E in puncta B & D respective: & in his casibus habebuntur $SB+rb=0$, $SD+rd=0$. Unde $r=-\frac{SB}{b}$, $r=-\frac{SD}{d}$, atque $z=SE+rv=SE-\frac{v}{b}SB=SE-\frac{v}{d}SD$. Porro erit $\frac{SB}{SD}=\frac{b}{d}$; atque adeo $CS\left|\frac{SB}{SD}\right.=\left(CS\left|\frac{b}{d}\right.=CS\left|\frac{b}{c}\right.-CS\left|\frac{d}{c}\right.=CB+CD=\right)BD$: unde dabitur punctum S.

Componetur itaque Problema hunc in modum. Producatur BD versus D ad S, eo usque, donec BD fuerit mensura rationis inter SB & SD ad Modulum CS. Deinde ad arbitrium posita quantitate c, ita capiantur quantitates b & v, ut eodem Modulo CS, fiat CB mensura rationis quam habet b ad c, fiat quoque CE mensura rationis quam habet v ad c: & erit vis resistentiæ in loco E, ad pondus relativum corporis penduli, ut $SE-\frac{v}{b}SB$, ad CA.

Hujus Problematis ſolutio utilitatem habet in Phyſica non contemnendam: quapropter conſtructionem ejuſdem Linearem, ex eadem Analyſi deductam, ſubjungere viſum eſt. Invento uti ſupra puncto *S*; ad rectam *SA* erigantur perpendicula *DH*, *Cc*, *EK*, *BF*, *AN*, rectæ *SN* utcunque per *S* ductæ occurrentia in *H*, *c*, *K*, *F*, *N*. Per punctum *c* ducatur recta *da* parallela rectæ *DA*, quæ iiſdem perpendiculis occurrat in *d*, *c*, *e*, *b*, *a*; & ad Aſymptoton *SA* ducatur Logiſtica *HGIF*, quæ tranſeat per puncta *H* & *F*, ſecetque perpendicula *Cc*, *EK* in *G* & *I*, ac parallelam *da* in *m*: namque his poſitis, erit pondus relativum corporis penduli, ad vim illam qua pendulum acceleratur ad punctum *E* in Medio non reſiſtente, ut *aN* ad *eK*; erit autem ad vim reſiſtentiæ in loco *E*, ut *aN* ad *KI*; atque adeo ad vim qua pendulum acceleratur ad punctum *E* in Medio reſiſtente, ut *aN* ad *eI*. Porro, ſi per punctum *m* ducatur ad rectam *SMA* perpendicularis *LmM*, quæ ſecet *SN* in *L*: erit *M* locus ubi reſiſtentia fit maxima: atque adeo reſiſtentia illa maxima, erit ad pondus relativum penduli, ut *Lm* ad *Na*, hoc eſt, ut *CM* ad *CA*.

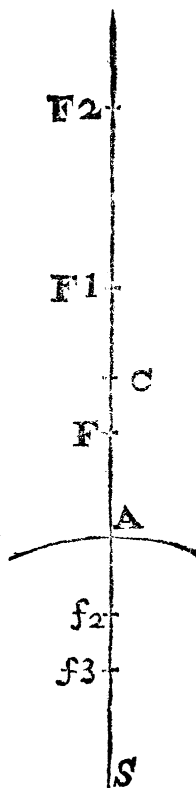
Ceterum ſi ita ducatur recta *SN*, ut abſcindat rectam *DH* quæ ſit dupla ipſius *SD*, centroque *C* & intervallo *CB* deſcribatur Circulus *BOP*, qui occurrat perpendiculo *KE* in *O*: erit penduli in Medio reſiſtente oſcillantis velocitas in loco *E*, ad velocitatem penduli ejuſdem ad eundem locum *E* delati per idem pondus relativum in Medio non reſiſtente, ut media proportionalis inter *CS* & *KI*, ad *EO*.

Adhæc si jungatur *CO*, & in perpendiculo *KE* sumatur *ER*, quæ sit ad *CB* ut *CB* ad mediam proportionalem inter *Cc* & *KI*; continuoque ductu rectæ *ER* in basim *BE* generetur area *BQRE*: erit tempus quo Cycloidis arcus *BE* describitur in Medio resistente, ad tempus quo idem arcus describeretur in Medio non resistente, ut area illa *BQRE*, ad Circuli sectorem *BOC*. Pergo nunc ad alia.

Densitatem Aeris invenimus ad quamvis altitudinem, ubi vis Gravitatis vel erat uniformis, vel decrescebat in recessu à centro telluris in duplicata ratione distantiæ: libet eandem exquirere denuo, ubi gravitatio vel augetur vel diminuitur in ratione datæ cujusvis dignitatis distantiæ. Sit *S* centrum telluris, *A* punctum in ejus superficie vel alibi utcunque situm, *SAF*2 recta à centro ad summitatem Atmosphæræ producta: & quærenda sit ratio densitatis in loco *A*, ad densitatem in loco quovis *F*, ex Hypothesi quod vis gravitatis in *F* sit ut distantiæ *SF* dignitas quæcunque SF^n, cujus index est *n*. Pro *SF* scribatur *x*, ac designent *d* & *v* densitates Aeris ad *A* & *F*; & cum densitas sit ubique ut pressura totius Aeris incumbentis, erit densitatis momentum ut momentum pressuræ, hoc est, $\dot v$ ut $v\dot x x^n$, atque adeo $\frac{\dot v}{v}$ ut $\dot x x^n$. Sit *AC* altitudo Atmosphæræ, cujus uniformis densitas eadem esset ac densitas loci *A*, vel sit *AC* ad altitudinem Hydrargyri barometrici in loco *A*, ut densitas Hydrargyri ad densitatem Aeris in eodem loco *A*: & si punctum *F* accedere intelligatur ad punctum *A*; erit altitudo Hydrargyri barometrici in loco *A*, ad altitudinem Hydrargyri barometrici in loco *F*, ut *AC* ad *FC*. Aeris ergo in loco *A* densitas *d*, est ad Aeris in loco *F* densitatem *v*, ut *AC* ad *FC*: unde consequitur ut sit $d - v$ sive $\dot v$, ad *d* sive *v*, ut *AF* sive $\dot x$, ad *AC*. Erit itaque, in hoc casu, $AC\frac{\dot v}{v} = \dot x = \frac{\dot x x^n}{SA^n}$. Quoniam ergo, ubicunque sumeretur punctum *F*, erat $\frac{\dot v}{v}$ ut $\dot x x^n$: erit porro $AC\frac{\dot v}{v} = \frac{\dot x x^n}{SA^n}$, ubicunque sumatur punctum *F*.

Jam

Jam si gravitatio sit reciproce ut distantia à centro, sive ut $\frac{1}{x}$ vel x^{-1}; erit $n = -1$, atque inde $AC\frac{\dot{v}}{v} = SA\frac{\dot{x}}{x}$; unde si Fluentes statuantur æquales, mensura rationis inter densitates d & v ad Modulum AC, æquabitur mensuræ rationis inter distantias SF & SA ad Modulum SA.



Si gravitationis sit alia quævis Lex: quoniam est $AC\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{x}x^n}{SA^n}$; si Fluentes statuantur æquales, erit $\frac{1}{n+1}$ in $\frac{SF^{n+1}}{SA^n} - SA$ mensura rationis inter densitates d & v ad Modulum AC. Itaque si sumantur in progressione Geometrica termini crescentes SA, SF, $SF1$, $SF2$, &c: decrescentes SF, SA, $Sf2$, $Sf3$, &c: mensura rationis inter densitates Aeris in A & F ad Modulum AC, erit $\frac{1}{2}Af3$, si gravitatio sit reciproce in triplicata ratione distantiæ; erit $Af2$, si gravitatio sit reciproce in duplicata ratione distantiæ; erit AF, si gravitatio uniformis statuatur; erit $\frac{1}{2}AF1$, si gravitatio sit ut distantia; erit $\frac{1}{3}AF2$, si gravitatio sit in duplicata ratione distantiæ. Et sic proceditur in infinitum.

Denique ut plenius constet, Syntheticas etiam demonstrationes ex elementis præmissis levi negotio concinnari posse; sufficiet unicum insuper addidisse Exemplum, tædet utique plura jam proferre. Repetatur itaque divisio illa Nautica Meridianæ quam supra attigimus, & videamus etiam absque ope Curvæ cujuspiam Logometricæ, annon simplicior aliquanto sit futura demonstratio ad modum sequentem. Sit $PXCQ$ Telluris axis, CO semidiameter Æquatoris, $PAOBQ$ Meridianus; & invenienda sit in planisphærio Nautico magnitudo cujusvis arcus AB. Ad arcus illius terminos A & B ducantur ab alterutro Polorum P vel Q rectæ QA, QB, semidiametro CO occurrentes in D & E: Dico magnitudinem Nauticam arcus AB æqualem esse mensuræ rationis inter EC & DC ad Modulum OC. Nam divisus intelligatur arcus AB in particulas

culas quam minimas RS, & jungantur QR, QS quæ ſecent CO in T & V; & demiſſo in axem perpendiculo SX quod rectæ QR occurrat in Z, erit lineola SZ æqualis particulæ RS. Itaque magnitudo Nautica naſcentis arcus RS, erit ad Sphæræ ſemidiametrum OC, ut arcus ille RS ſive lineola SZ ad SX, hoc eſt, ut VT ad VC. Unde (per Corol. 2. Prop. 1.) magnitudo illa Nautica æquatur menſuræ rationis inter VC & TC ad Modulum OC: & ſimiles utrobique ſummas colligendo, magnitudo Nautica totius arcus AB æquabitur menſuræ totius rationis inter EC & DC ad eundem Modulum OC.